

黏性流体力学 · Viscous Fluid Mechanics

第2章 黏性流体的控制方程

Governing Equations of Viscous Fluids

从守恒定律到 Navier–Stokes 方程：黏性如何进入流动控制方程

授课教师：徐翱

本章要回答的根本问题

如何用统一的数学方程描述黏性流体的运动？

控制方程来自四个基本物理定律

- 质量守恒 → 连续性方程
- 线动量守恒 → Cauchy 动量方程
- 角动量守恒 → 应力张量对称性
- 流体本构关系 → 黏性应力与变形率

组合得到核心方程

守恒定律 + 本构关系

↓

Navier-Stokes 方程组

+ 初始条件与边界条件

学习目标

1. 区分 Lagrange 与 Euler 描述，熟练使用物质导数
2. 写出质量守恒方程的一般形式和不可压缩形式
3. 解释面力、牵引向量和 Cauchy 应力张量的物理意义
4. 将总应力分解为压强部分和黏性应力部分
5. 理解变形率张量与刚体转动的区别
6. 写出 Newton 流体本构关系，理解其在方程封闭中的作用
7. 从 Cauchy 动量方程得到不可压缩 Navier–Stokes 方程
8. 解释 NS 方程中各项的物理意义
9. 写出二维和三维直角坐标系下的基本控制方程
10. 区分初始条件、速度边界、应力边界和周期边界条件
11. (加强) 得到涡量输运方程，解释涡量对流、伸展和扩散
12. (加强) 得到机械能方程，区分应力功率与黏性耗散

教学重点与难点

教学重点

- 物质导数的物理意义：局部+对流
- 连续性方程与不可压缩条件
- Cauchy 应力张量与牵引向量
- 总应力分解：压强 + 黏性应力
- Newton 流体本构关系 $\tau=2\mu D$
- Navier-Stokes 方程的推导与各项意义
- 边界条件的类型与物理含义

教学难点

- 应力张量下标的物理含义与符号约定
- 变形率张量 D 与旋转率张量 W 的区别
- 本构关系如何使守恒方程封闭
- NS 方程中黏性项 $\mu \nabla^2 u$ 的来源
- 压强在不可压缩流动中的约束作用
- 壁面剪切应力的正负号约定
- 方程—未知量—边界条件的整体匹配

前章回顾与本章定位

第1章 已建立

- 黏性的物理本质
- 剪切应力 $\tau = \mu du/dy$
- 无滑移条件
- Reynolds 数概念



第2章 本章任务

- 建立统一控制方程
- 黏性如何进入动量方程
- 得到 NS 方程组
- 明确初边值问题结构



后续章节

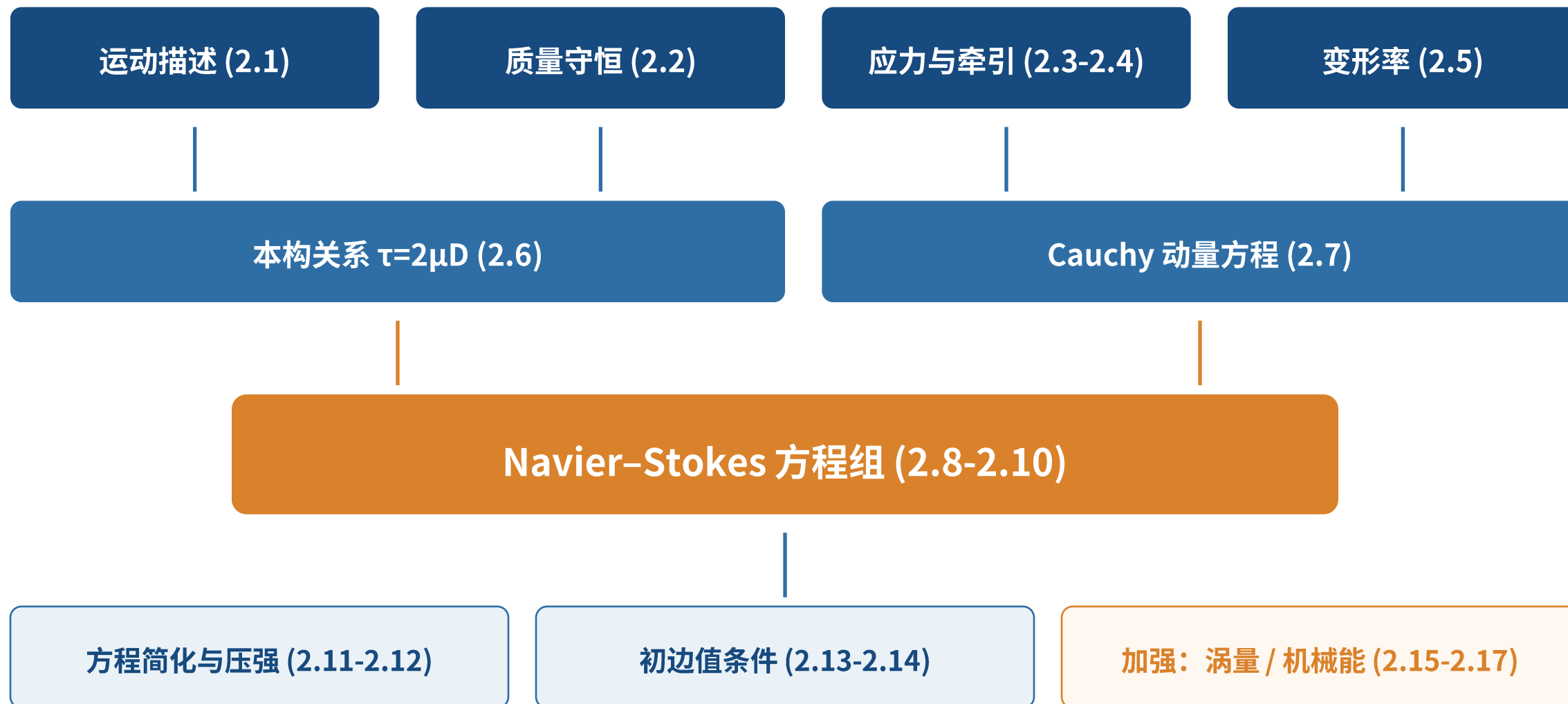
- 第3章 无量纲化
- 第4章 精确解
- 第6章 边界层
- 第8章 湍流与CFD

本章在课程主线中的位置

控制方程 → 无量纲化 → Reynolds 数 → 不同 Re 极限 → 精确解 / Stokes 流 / 边界层 → 分离与阻力 → 湍流与数值方法

本章建立的 NS 方程是后续所有章节的共同起点。第3章将对这些方程无量纲化，从方程结构中重新认识 Reynolds 数的物理意义。

本章知识结构



工程问题导入：为什么需要控制方程？

工程场景

- 飞行器表面：摩擦阻力从何而来？
- 管道输运：压降与流量有何关系？
- 涡轮机械：叶片表面黏性如何影响效率？
- 微尺度流动：为什么尺度变小后黏性主导？

核心挑战

- 第1章的一维剪切公式不够用
- 真实流动是三维、非定常、非线性的
- 需要统一方程描述任意黏性流动
- 方程必须能预测速度、压强和应力分布

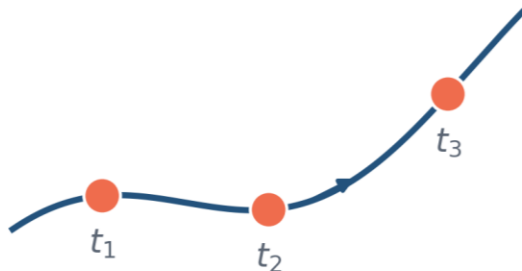
本章解决思路

工程/物理现象 → 为什么无黏模型不足 → 黏性产生什么作用 → 建立控制方程 → 比较不同物理项大小 → 确定适用近似 → 求解典型问题

本章不追求“一般地求解”NS方程，而是建立完整的方程框架和初边值问题结构，为后续所有章节提供共同的数学基础。

2.1 描述流体运动的两种方式

Lagrange 描述

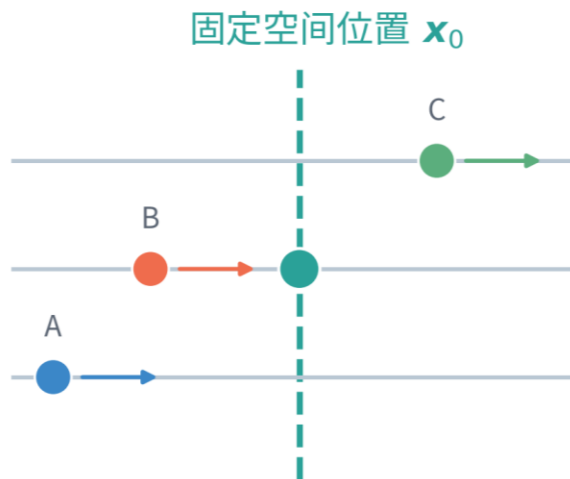


跟踪同一个流体质点

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$$

同一流动的两种等价描述：一个“跟着质点走”，一个“站在空间中看”

Euler 描述



观察固定位置处的场变量

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad p(\mathbf{x}, t), \quad \rho(\mathbf{x}, t)$$

Lagrange 描述

跟踪每一个流体质点的运动

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$$

问：这个质点现在在哪里？

Euler 描述

在固定空间位置研究场变量

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad p = p(\mathbf{x}, t)$$

问：这个位置有什么样的流体经过？

关键区别： Lagrange 描述“跟着质点走”，Euler 描述“站在空间中看”。流体力学的大多数控制方程采用 Euler 描述，因为我们更关心空间各点的速度、压强和密度分布。两种描述等价，但适用于不同分析方式。

稳态收缩管中，流体质点有加速度吗？

考虑一个稳态收缩管流动：

- 固定位置的速度不随时间变化 ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$)
- 但流体质点从粗截面进入细截面时速度增大

请问：流体质点是否具有加速度？

请思考：局部加速度和对流加速度分别是什么？

稳态意味着什么？

物质导数：跟随流体质点观察变化率

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

局部加速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$

固定空间位置处速度随时间的变化
非定常流动中不为零
稳态流动中为零

对流加速度 $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$

质点穿过空间非均匀速度场产生的加速度
即使稳态也可能不为零
是 NS 方程非线性的来源

互动问题答案：稳态收缩管中的流体质点有加速度

稳态意味着 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ （局部加速度为零），但收缩管中速度沿流向增大（ $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ ），因此对流加速度 $u \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ 。

结论：稳态 $\neq$ 零加速度。 只要速度在空间中变化，对流加速度就可能存在。物质导数将贯穿连续性方程、动量方程以及后续的涡量、温度和组分输运问题。

补充材料：拉格朗日简介



视频地址：<https://www.bilibili.com/video/BV1Xb411u7GH>

2.2 质量守恒：控制体中的质量平衡

质量守恒：控制体内质量的变化率 + 通过控制面流出的净质量流率 = 0

积分形式

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV + \oint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

局部微分形式（连续性方程）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

推导关键步骤

Step 1: 写出质量守恒的积分形式

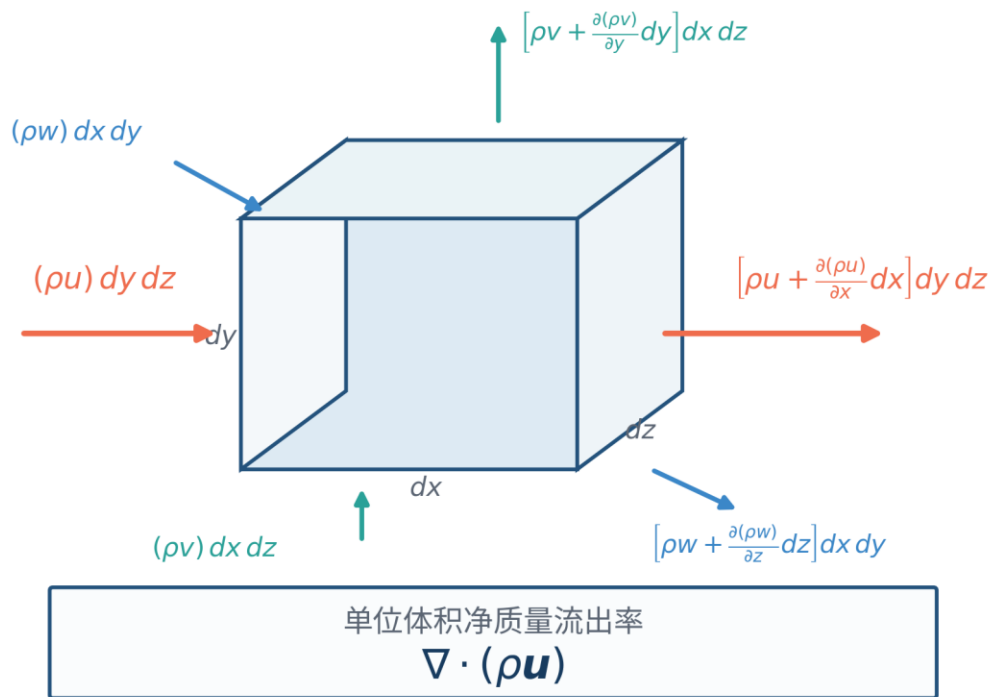
Step 2: 利用 Gauss 散度定理 $\oint \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \, dV$ ，将面积分转为体积分

Step 3: 合并积分，由于控制体 V 可任意选取，被积函数必须处处为零

Step 4: 得到局部形式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$

微元视角：为什么散度表示净质量流出？

流体微元的质量通量：散度为何表示净流出率？



x 方向净流出

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dV$$

y 方向净流出

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dV$$

z 方向净流出

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dV$$

三个方向相加： $\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dV = \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV$

因此， $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$ 可以直接理解为**单位体积内质量通量的净流出率**。这与控制体积分推导完全等价，但更直观。

不可压缩流动：连续性方程的简化

物质导数形式

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

不可压缩条件

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

概念辨析：不可压缩流体微团的体积在运动中保持不变，因此 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 。若密度为常数 $\rho = \text{const}$ ，由连续性方程自然得到 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 。但需区分：**密度常数**是物性描述；**不可压缩条件**强调微团体积不变。本书后续主要讨论常密度不可压缩 Newton 流体。

直角坐标形式

$$\text{三维: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\text{二维: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

易错点：不可压缩不要求每个速度分量没有空间变化，只要求散度为零。 $u = ax, v = -ay$ 中各分量都有梯度，但散度为零。

例 2.1 + 课堂互动：判断不可压缩条件

例 2.1 判断速度场是否满足不可压缩条件

给定二维速度场 $u = ax$, $v = -ay$, a 为常数。

计算: $\frac{\partial u}{\partial x} = a$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -a$

因此: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = a - a = 0$

结论: 满足不可压缩连续性方程。

课堂互动 2: 下列速度场是否不可压缩?

(A) $u = ay, v = 0$

(B) $u = ax, v = ay$

(C) $u = -ay, v = ax$

请判断哪些满足 $\nabla \cdot u = 0$?

物理意义解读

例 2.1 的速度场 $u = ax, v = -ay$ 是一个二维驻点流 (stagnation point flow)。x 方向拉伸 (u 随 x 增大), y 方向压缩 (v 随 y 减小而更负), 体积变化率恰好抵消。

这说明: **不可压缩并不意味着流体微团不变形, 而是体积不变。** 微团可以被拉伸和压缩, 只要三个方向的体积变化率之和为零。

互动答案: (A) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 + 0 = 0 \checkmark$; (B) $a + a = 2a \neq 0 \times$; (C) $0 + 0 = 0 \checkmark$ (刚体转动)

2.3 作用在流体上的力：体力与面力

体力 (Body Force)

作用于流体体积内部，大小与质量或体积成正比

- 重力、电磁力
- 旋转参考系中的惯性力

单位质量体力记为 $\mathbf{b}$

单位体积体力为 $\rho\mathbf{b}$

面力 (Surface Force)

作用在流体微团的边界表面上

- 法向为 $\mathbf{n}$ 的微小表面
- 单位面积所受的力称为牵引向量

记为 $\mathbf{t}^n$

包含法向分量和切向分量

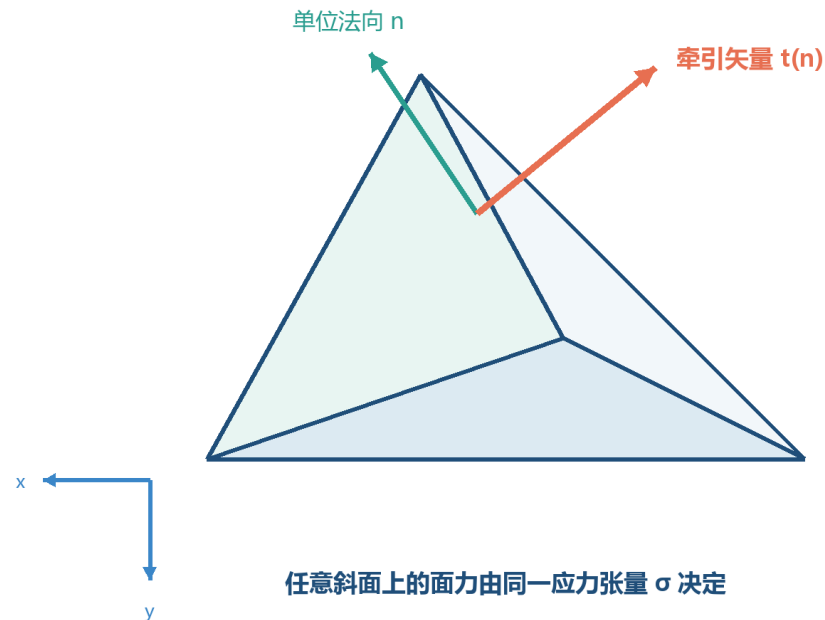
关键问题：如何描述任意方向截面上的面力？

如果对每个不同方向的截面都定义一套力，将需要无穷多组量。Cauchy 应力定理解决了这个问题：

任意方向表面上的牵引向量，都可以由同一个二阶应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 与该面法向 $\mathbf{n}$ 的乘积表示：

$$\mathbf{t}^n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

Cauchy 应力定理：一个张量描述所有截面



Cauchy 应力定理

$$\mathbf{t}^{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

给定截面的单位法向 $\mathbf{n}$ 后， $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ 就给出该截面上的牵引向量。

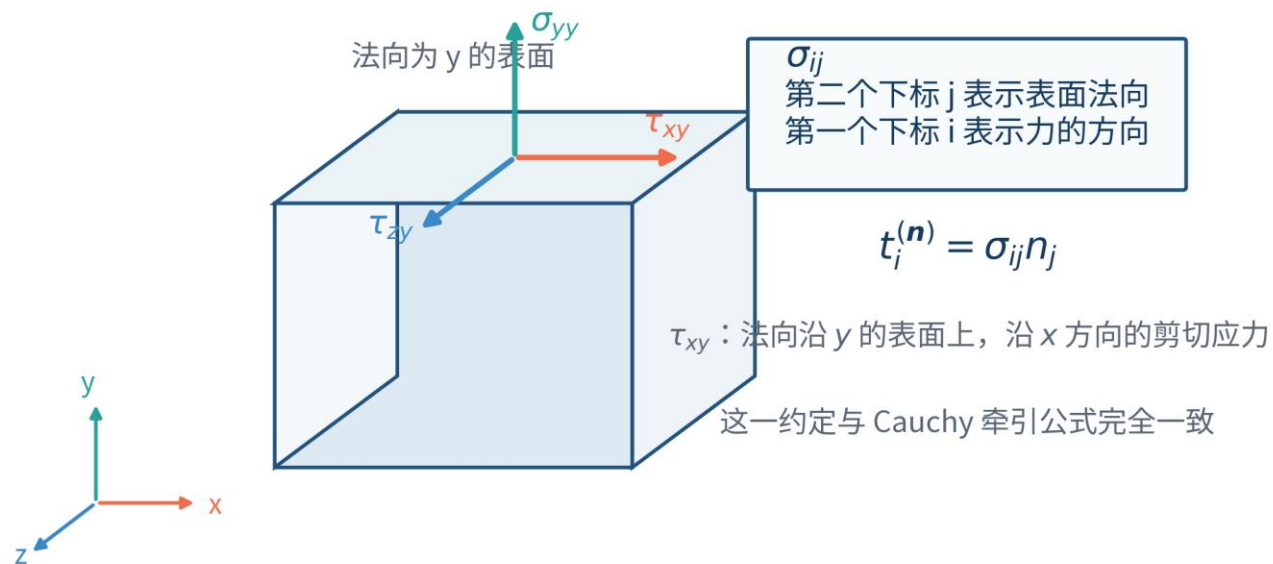
改变截面方向只需改变 $\mathbf{n}$ ，无须重新定义一套应力。

分量形式： $t_i^{\mathbf{n}} = \sigma_{(ij)} n_j$

Cauchy 四面体：考虑一个由三个坐标面和一个斜面组成的四面体。当四面体趋于无穷小时，斜面上的牵引向量必须与三个坐标面上的应力平衡。由此证明：任意斜面上的牵引向量可以由应力张量和法向量唯一确定。这就是为什么只需要 9 个应力分量（独立 6 个）就能描述任意方向截面上的面力。

应力张量分量的下标约定（教学难点）

应力张量分量的下标约定



本书约定（与 $t_i = \sigma_{ij}n_j$ 一致）：

第二个下标 j = 所作用表面的法向方向

第一个下标 i = 力的方向

示例：

τ_{xy} = 法向沿 y 方向的表面上、沿 x 方向的剪切应力

$\sigma_{(yy)}$ = 法向沿 y 方向的表面上的法向应力

对角元 σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} 为法向应力

非对角元为剪切应力

为什么下标约定如此重要？ 不同教材可能采用相反约定（第一个下标表示面法向，第二个表示力方向）。本书统一采用 $t_i^n = \sigma_{ij}n_j$ 的约定，即第二个下标与法向分量相乘。

这直接影响力散度 $\nabla \cdot \sigma$ 的分量写法和壁面剪切应力的符号判断。后续所有推导都基于此约定，务必牢记。

应力张量的对称性 + 课堂互动 3

角动量守恒 → 应力张量对称

经典连续介质中（不考虑偶应力），角动量守恒要求：

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$$

即 $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$

独立分量数

三维应力张量形式上有 9 个分量

对称性使独立分量只有 **6 个**

3 个法向应力 + 3 个独立剪切应力

课堂互动 3：刚体转动会产生黏性应力吗？

考虑二维刚体转动速度场： $u = -\Omega y, v = \Omega x$

- 计算速度梯度 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}$ ，它们是否为零？
- 这个流场有涡量吗？涡量是多少？
- 对于 Newton 流体，这个流场会产生黏性剪切应力吗？

（提示：黏性应力取决于变形率，而非速度梯度本身。答案见 2.5 节）

2.4 总应力分解：压强与黏性应力

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau$$

压强部分 $-p\mathbf{I}$

- 各向同性，对任意方向截面只产生法向压缩
- $p > 0$ 表示压缩压强，因此写为 $-p\mathbf{I}$
- 即使理想无黏流体也可以具有非零压强

黏性应力部分 τ

- 也称偏应力张量，与流体变形率有关
- 包含切向剪切应力和附加法向应力
- 静止流体中 $\tau = 0$ ，只有压强作用

易错点：压强不是"黏性的一部分"

静止流体 $u = 0$ 时，Newton 流体的黏性应力为零 $\tau = 0$ ，因此 $\sigma = -p\mathbf{I}$ 。这就是流体静力学中的应力状态。

压强和黏性应力是两种本质不同的作用：压强是各向同性的热力学量，黏性应力是与变形率相关的耗散量。两者必须区别对待。

变形率张量的分量与迹

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

对角元：线变形率

$D_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$: x 方向微元长度的相对变化率

$D_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$: y 方向线变形率

$D_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$: z 方向线变形率

迹与不可压缩条件

$$\text{tr}(\mathbf{D}) = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

迹表示微团体积的相对变化率

不可压缩流动: $\text{tr}(\mathbf{D}) = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

2.5 流体微团运动：平移、转动与变形

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

变形率张量 $\mathbf{D}$ （对称部分）

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

描述流体微团的瞬时形变速率
决定黏性应力

旋转率张量 $\mathbf{W}$ （反对称部分）

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T]$$

与局部刚体式转动有关
不产生黏性应力

互动题 3 答案：刚体转动不产生黏性应力

刚体转动 $u = -\Omega y, v = \Omega x$ 中, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\Omega, \frac{\partial v}{\partial x} = \Omega$, 但变形率 $D_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$ 。

因此黏性应力 $\tau_{xy} = 2\mu D_{xy} = 0$ 。黏性抵抗的不是速度本身, 也不是刚体转动, 而是相对变形。涡量 $\omega = 2\Omega$ 非零, 但变形率为零——涡量不等于黏性应力。

2.6 为什么仅有守恒定律还不能求解流动？

质量守恒和动量守恒是对所有经典连续介质都成立的普适定律。

但 Cauchy 动量方程 $\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}$ 中仍包含未知应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 。

如果不知道材料的应力如何响应变形，方程组仍然没有封闭。

守恒定律 + 本构关系 = 封闭的物理模型

本构关系的作用

对于 Newton 流体，本构关系把黏性应力与变形率联系起来： $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$

这样，Cauchy 动量方程中的未知应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 就可以用速度场 $\mathbf{u}$ 和压强 p 表示，方程组中只剩下 $\mathbf{u}$ 和 p 作为未知量，与连续性方程和三个动量方程在数量上匹配。

Navier-Stokes 方程正是质量守恒、动量守恒与 Newton 流体本构关系共同作用的结果。

Newton 流体的本构关系： $\tau = 2\mu\mathbf{D}$

$$\tau = 2\mu\mathbf{D}$$

关键物理含义

- 本书主要讨论各向同性、不可压缩 Newton 流体，此时 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
- 黏性应力与变形率之间是线性关系，比例系数为动力黏度 μ
- 本构关系只依赖变形率 $\mathbf{D}$ ，不会把刚体平移或刚体转动误认为黏性变形
- 这是本书后续统一采用的本构关系

拓展：一般 Newton 流体

若允许体积变化：

$$\tau = 2\mu\mathbf{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}$$

λ 为第二黏性系数。不可压缩条件使此项消失。

总应力张量

代入 $\sigma = -p\mathbf{I} + \tau$ ：

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$

将应力与速度场和压强场联系起来。

从第1章到第2章：一维剪切是三维本构的特例

第1章：简单剪切流动

平行流动 $\mathbf{u} = (u(y), 0, 0)$

变形率： $D_{xy} = \frac{1}{2} \frac{du}{dy}$

本构关系： $\tau_{xy} = 2\mu D_{xy}$

带入： $\tau_{xy} = 2\mu \cdot \frac{1}{2} \frac{du}{dy} = \mu \frac{du}{dy}$ (Newton 黏性定律)

第2章：三维一般流动

任意速度场 $\mathbf{u} = (u, v, w)$

变形率张量 $\mathbf{D}$ (6 个独立分量)

本构关系： $\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D}$ (张量形式)

包含所有剪切和法向黏性应力

一维公式是三维本构在简单流动中的特例

课程思政：科学建模的严谨性

从一维经验公式到三维张量本构关系，体现了科学建模从特殊到一般、从经验到理论的发展过程。Newton 在 1687 年提出一维黏性假设，Navier (1821)、Stokes (1845) 等科学家经过近两个世纪的努力，才建立起三维一般流动的控制方程。这一过程告诉我们：科学理论的建立需要严谨的逻辑推导和实验验证，每一个公式背后都有明确的物理假设和适用条件。在工程应用中，必须清楚模型的适用边界，不能盲目套用。

2.7 线动量守恒：从 Newton 第二定律到 Cauchy 方程

Newton 第二定律：质量 $\times$ 加速度 = 所受合力。对随流体运动的物质体 $V(t)$ ，总动量 $\mathbf{P} = \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV$ 。

积分形式

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{S(t)} \mathbf{t}^{(n)} dA + \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} dV$$

推导关键步骤

Step 1: 由 Cauchy 应力定理 $\mathbf{t}^n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ，对面力积分应用 Gauss 定理： $\oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV$

Step 2: 物质体的动量变化率可写为 $\int \rho (Du/Dt) dV$ (结合质量守恒)

Step 3: 代入后合并积分，由于物质体任意，被积函数必须处处为零

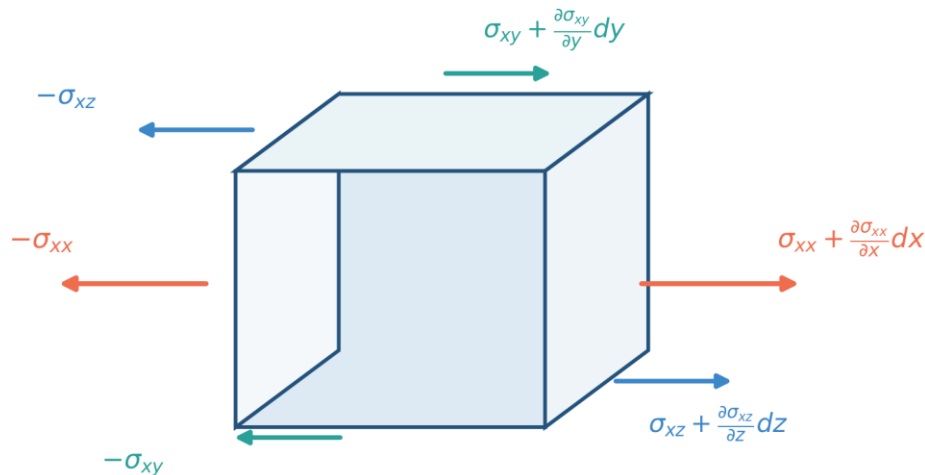
$$\rho \frac{Du}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (\text{Cauchy 动量方程})$$

微元视角：应力散度 $\nabla \cdot \sigma$ 从哪里来？

微元六个面上的表面力如何汇成应力散度？

$$\nabla \cdot \sigma$$

图中只显示沿 x 方向的应力分量；y、z 方向完全类似



x 方向净表面力

$$F_x^{(S)} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dV = (\nabla \cdot \sigma)_x dV$$

x 方向净表面力

$$F_x^{(S)} = \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right] dV = (\nabla \cdot \sigma)_x dV$$

按照下标约定：

- 法向沿 x 的表面上，x 向应力为 σ_{xx}
- 法向沿 y 的表面上，x 向应力为 σ_{xy}
- 法向沿 z 的表面上，x 向应力为 σ_{xz}

相对两侧表面的应力差形成三个偏导数，三者相加即为应力散度的 x 分量。

核心结论：六个表面上的净表面力除以体积，正是应力张量的散度 $\nabla \cdot \sigma$ 。

代入应力分解 $\sigma = -p\mathbf{I} + \tau$ ，得 $\nabla \cdot \sigma = -\nabla p + \nabla \cdot \tau$ ，Cauchy 方程变为： $\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho \mathbf{b}$

这个形式已经清楚地区分了压强作用、黏性作用和体力作用。

2.8 Navier–Stokes 方程：黏性项从何而来？

关键推导： $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ 如何化为 $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$

对于不可压缩 Newton 流体， $\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D}$ 。若 μ 为常数：

$$\boldsymbol{\tau} = \mu[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

逐项取散度：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mu \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

对于不可压缩流动， $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ，因此第二项为零：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

重要结论：NS 方程中的 Laplace 算子 ∇^2 并非经验加入，而是由 **Newton 流体本构关系、常黏度假设和不可压缩条件** 共同导出。

将 $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \nabla^2 \mathbf{u}$ 代回动量方程：

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b}, \text{ 得到不可压缩 Newton 流体的 Navier–Stokes 方程。}$$

这回答了本章开头的问题：**黏性如何通过应力进入动量方程？** 答案是通过本构关系 $\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D}$ 和散度运算。

Navier–Stokes 方程组（本章核心）

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b}$$

连同连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ，共同构成不可压缩 Newton 流体的基本控制方程

各项物理意义（数学项 ↔ 物理作用）

非定常项 $\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ 固定点速度随时间变化	对流项（非线性） $\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ 质点穿过非均匀速度场	压强梯度项 $-\nabla p$ 高压→低压加速	黏性项 $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$ 黏性动量扩散	体力项 $\rho \mathbf{b}$ 重力、电磁力等
--	--	--	---	--

单位质量形式（两边除以 ρ ，定义 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ）：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\left(\frac{1}{\rho}\right) \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{b}$$

该形式在理论分析中常见，直接突出运动黏度 ν 的扩散作用。

学习目标：不是把五项都背下来，而是判断——对于具体流动，哪些项存在？哪些项重要？哪些项形成主导平衡？
稳态流动中非定常项为零；充分发展平行流中对流项可为零；低 Re 流动中惯性项远小于黏性项；边界层中壁面法向黏性扩散仍与惯性同阶。

下列流动中，NS 方程哪些项必然为零？

NS 方程： $\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b}$

(A) 稳态均匀流： $u=U_0=\text{常数}$, $v=w=0$ ，无体力，压强均匀

(B) 静止流体： $u=v=w=0$ ，重力作用下

(C) 稳态充分发展平行流： $u=(u(y),0,0)$ ，忽略体力

请分别判断：非定常项？对流项？压强梯度？黏性项？体力项？

提示：先根据几何和物理条件判断变量依赖关系，再逐项分析。方程简化首先依赖物理假设，而不是代数技巧。

2.9 三维直角坐标系中的 Navier–Stokes 方程

连续性方程: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, $\mathbf{u} = (u, v, w)$

x 方向动量方程

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \rho b_x$$

y 方向动量方程

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \rho b_y$$

z 方向动量方程

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \rho b_z$$

虽然分量形式较长,但其结构与矢量形式完全一致。建议学生对照矢量形式逐项辨认。

2.10 二维不可压缩流动 + 2.11 方程简化的第一步

二维流动: $\mathbf{u} = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0)$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

$$\text{连续性: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\text{x 动量: } \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \rho b_x$$

$$\text{y 动量: } \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \rho b_y$$

这些方程将在后面的 Couette 流、Poiseuille 流、边界层和二维绕流问题中反复使用。

若 $\frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \rightarrow$ 线性速度剖面 (Couette 流)

若 $\frac{dp}{dx} \neq 0 \rightarrow$ 二次函数速度剖面 (Poiseuille 流)

本例暂不求解, 只强调方法: **先删去必然为零的项, 再求解剩余方程。**

2.11 方程简化: 先利用物理条件

求解 NS 方程的第一步不是积分, 而是根据几何和物理条件判断变量依赖关系。

示例: 二维稳态、充分发展平行流 $\mathbf{u} = (u(y), 0, 0)$

- $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ (稳态)
- $v = 0, w = 0$
- $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (充分发展)

对流项 $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

方程简化首先依赖物理假设, 不是代数技巧。

例 2.2 一维稳态平行流简化

两无限大平行平板间稳态流动, $\mathbf{u} = (u(y), 0, 0)$, 忽略 x 方向体力。
连续性自动满足, x 动量方程简化为:

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

压强梯度与黏性动量扩散构成主要平衡。

2.12 压强在不可压缩流动中的特殊作用

核心特点：在常密度不可压缩流动模型中，压强不是由独立状态方程给出的演化变量，而主要承担**维持速度场满足不可压缩约束**的动力学作用。

连续性方程要求 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ，动量方程中的压强梯度 $-\nabla p$ 会不断调整流体加速度，使速度场在演化过程中保持满足不可压缩约束。

速度和压强并非两个彼此独立的问题；连续性方程约束速度场，动量方程决定其演化，压强梯度负责使两者相容。

压强 Poisson 方程

$$\nabla^2 p = -\rho \nabla \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] + \rho \nabla \cdot \mathbf{b}$$

对单位质量形式的 NS 方程两边取散度，利用 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 消去非定常项和扩散项的散度，得到压强 Poisson 方程。

这表明：压强场在每一时刻都与整个速度梯度场相联系，不是仅由某一点的局部速度代数决定。对于均匀重力等无散体力， $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ ，源项主要来自速度对流。

注意：压强 Poisson 方程不是额外增加的一条独立定律，它由动量方程和不可压缩约束共同推出。必须配合与原初边值问题相容的压强边界信息。固壁处的压强法向梯度通常由动量方程在法向上的投影得到，不能脱离速度或牵引条件任意指定。

2.13 初始条件与边界条件：方程本身不够

控制方程本身通常不足以唯一确定一个流动问题，还必须给出相应的**初始条件**和**边界条件**。仅写出 NS 方程，还没有完整定义一个可求解的流动问题。

初始条件（非稳态问题）

给定初始时刻的速度场：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$$

且需满足 $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$

压强通常不需要独立的初始条件

固体壁面速度条件（Dirichlet）

无滑移、无穿透条件：

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_w$$

静止固壁上 $\mathbf{u} = 0$

这是黏性流动最基本的边界条件

应力边界条件（Neumann）

已知表面牵引力时指定：

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_b$$

例如自由表面问题中，界面两侧的法向应力和切向应力关系需要通过应力边界条件表达。

入口、出口与对称条件

入口：指定速度分布、质量流率或体积流量

出口：指定压强、法向应力，或充分发展梯度条件

对称面： $v = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

出口条件不能随意指定，必须与方程数学性质相容。

壁面剪切应力的正负号约定（全书统一）

全书约定：区分三类量，不能只凭"剪切应力"四个字互相替代。符号错误是本章最常见的错误之一。

1. 流体内部应力分量

简单平行流中：

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

正负由所选 x, y 坐标方向决定。

这是张量分量，不是作用在某一特定壁面上的力。

2. 壁面两侧切向牵引

n_f 为流体域外法向：

壁面对流体牵引 $\mathbf{t}_{w \rightarrow f} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_f$

流体对壁面反作用 $\mathbf{t}_{f \rightarrow w} = -\mathbf{t}_{w \rightarrow f}$

二者方向相反。上下壁即使 τ_{xy} 相同，也会因 $n_f = \pm 1$ 得到不同牵引方向。

3. 只关心大小时

明确写成 $|\tau_w|$ 。

摩擦速度始终取非负：

$$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}}$$

平面边界层中令 x 沿来流、 y 从壁面指向流体

，定义 $\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_w$ 。

周期边界条件 + 压强基准

周期边界：几何和流动在某方向重复时， $\mathbf{u}(\mathbf{x} + L_i \mathbf{e}_i, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 。周期边界不是"边界上没有条件"，而是把一侧未知量与另一侧对应点配对。常用于充分发展流动和 DNS/LES。压强驱动的周期通道中，压强分解为线性平均部分+周期余量。

压强基准：动量方程只出现压强梯度， $p \rightarrow p + C$ 不改变速度场。实际求解时通常指定某点参考压强，或规定全域平均压强为零，以消除不唯一性。

方程—未知量—条件总表 + 重力与修正压强

类别	数量	典型表达	在初边值问题中的作用
未知量	4 个标量场	u, v, w, p	求解目标；速度与压强需耦合确定
连续性方程	1 个	$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$	约束速度场保持不可压缩
动量方程	3 个	$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b}$	决定速度分量演化，通过压强梯度满足连续性
初始条件	非稳态需要	$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$	给出演化起点；压强不需独立初始条件
边界条件	随边界而定	速度、牵引力、入口流量、出口压强等	使方程对应具体物理问题，不能指定互不相容条件
压强基准	通常 1 个	$p(\mathbf{x}_{ref}) = 0$ 或 $\int_V p \, dV = 0$	消除压强附加常数的不唯一性

2.14 重力与修正压强

若体力只有均匀重力 $\mathbf{b} = \mathbf{g}$ ，NS 方程为 $\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}$ 。

对于常密度流体，可将重力势写入压强。若 $\mathbf{g} = -\nabla \Phi_g$ ，定义修正压强 $p^* = p + \rho \Phi_g$ ，则：

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p^* + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

均匀重力可以吸收到修正压强中。若密度发生变化（如浮力驱动流动），这种合并不再能直接沿用，必须重新检查压强项与体力项的关系。

为二维通道流选择合适的边界条件

考虑二维通道流：流体在两个无限大平行平板之间沿 x 方向流动，下壁 $y=0$ 静止，上壁 $y=h$ 以速度 U 运动。

请为以下边界分别写出合适的条件：

- (1) 下壁 $y=0$ （静止不可渗透固壁）
- (2) 上壁 $y=h$ （以速度 U 沿 x 方向运动的平板）
- (3) 如果通道关于中心线 $y=h/2$ 对称，中心线上可以用什么条件？
- (4) 如果已知上壁对流体的切向牵引力，应该用什么类型的边界条件？

提示：区分速度边界条件（Dirichlet）和应力边界条件（Neumann）。对称条件是速度法向分量为零、切向速度法向梯度为零。

2.15 加强内容：涡量输运方程

涡量定义： $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ ，等于流体微团局部刚体转动角速度的两倍，单位 s^{-1} 。描述局部旋转趋势，但不能单独代表变形或黏性应力。

从 NS 方程取旋度得到涡量输运方程

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$$

推导关键步骤

Step 1: 对动量方程两侧取旋度。压强梯度满足 $\nabla \times (\nabla p) = 0$ ，因此常密度流动中压强梯度不出现在涡量方程中。

Step 2: 利用恒等式 $\nabla \times [(u \cdot \nabla)u] = (u \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)u$ ，将对流项分解为涡量对流和涡伸展。

Step 3: 旋度与常系数 Laplace 算子可交换，得到黏性扩散项 $\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$ 。均匀重力等有势体力的旋度为零。

易错点：涡量不等于黏性应力。简单剪切流 $u = (\gamma y, 0, 0)$ 具有 $\boldsymbol{\omega} = -\gamma e_z$ ，同时 $\tau_{xy} = \mu\gamma$ 。但刚体转动 $u = (-\Omega y, \Omega x, 0)$ 虽然具有 $\boldsymbol{\omega} = 2\Omega e_z$ ，其变形率 $D = 0$ ，因而黏性应力为零。

涡量衡量局部旋转，Newton 黏性应力由变形率决定；两者有关，但不能互相替代。

涡量方程的三项物理机制 + 二维简化

1. 涡量随流输运

物质导数 $D\omega/Dt$ 表示跟随流体质点观察到的涡量变化。

对流并不是涡量凭空消失或产生，而是把已有涡量带到其他位置。

2. 三维涡伸展与倾斜

$(\omega \cdot \nabla)u$ 表示速度沿涡量方向的变化。

流体微团沿涡线方向被拉伸时，涡量大小可以增大（角动量守恒）。

这是三维湍流形成更细小旋涡结构的重要机制。

3. 黏性扩散

$\nu \nabla^2 \omega$ 使涡量从强涡量区向周围扩散。

在小尺度上平滑尖锐梯度。

与第1章"黏性是动量的分子扩散"一致，只是改用涡量语言描述。

二维不可压缩流动：涡伸展项消失

二维流动 $u = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0)$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, 涡量只有垂直分量 $\omega = \omega e_z$, $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ 。

此时 $(\omega \cdot \nabla)u = \omega \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, 涡量方程简化为: $\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left[\frac{(\partial^2 \omega)}{(\partial x^2)} + \frac{(\partial^2 \omega)}{(\partial y^2)} \right]$

二维流动没有三维涡伸展项，涡量只通过对流搬运和黏性扩散变化。若 $\nu = 0$, 则 $\frac{D\omega}{Dt} = 0$ (二维无黏流动中涡量随流体质点守恒)。

固壁为什么是强涡量区域?

涡量方程本身没有显式写出"壁面生成涡量", 但无滑移边界条件会在固壁附近建立很大的切向速度梯度。对于薄边界层, $\omega_z \approx -\frac{\partial u}{\partial y}$, 因此边界层可以看成贴附在固壁附近的强涡量薄层。

这一图像把后续章节连成主线: 第4章Stokes第一问题的壁面涡量扩散 → 第6章边界层的强涡量薄层 → 第7章分离后的自由剪切层和尾迹旋涡 → 第8章湍流中的多尺度涡结构。

2.16 加强内容：机械能收支与黏性耗散

第1章已指出：黏性既输运动量，也使宏观机械能不可逆地转化为内能。前一种作用出现在动量方程的黏性项中，后一种作用要通过机械能收支才能看清。

从动量方程点乘速度得到机械能方程

$$\rho \frac{Dk_m}{Dt} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} - \Phi$$

推导关键：单位体积黏性耗散率 $\Phi = 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} \geq 0$

定义单位质量动能 $k_m = \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ 。对 Cauchy 动量方程两边点乘速度，利用恒等式 $\mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}$ 。

对于不可压缩 Newton 流体， $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$ ， $\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D}$ ，对称张量 $\boldsymbol{\tau}$ 与反对称的刚体转动部分点乘为零，因此 $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} = 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} \equiv \Phi$ 。
 Φ 称为单位体积黏性耗散率，单位 W/m^3 。对于普通 Newton 流体， $\mu > 0$ ， $\Phi = 2\mu \Sigma D_{ij}^2 \geq 0$ ，因此 $-\Phi$ 在机械能方程中永远是损失项。

整体收支（对物质体积积分）：

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho k_m dV = \int_{\partial V(t)} \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dA + \int_{V(t)} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dV - \int_{V(t)} \Phi dV$$

动能变化率 = 表面牵引力功率 + 体力功率 - 黏性耗散率。

局部黏性功率的分解：输运 vs 耗散

局部黏性功率：输运与耗散必须分开

$$\text{div}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + (-\Phi) = \mu \mathbf{u} \cdot \text{Lap}(\mathbf{u})$$



$\Phi = 2\mu \times (\text{变形率张量的平方和}) \geq 0$ 才是耗散率；整个黏性功率项没有确定符号

输运可在局部输入或移出机械能，耗散则始终把机械能转化为内能

恒等式：

$$\mu \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \Phi$$

应力功输运项可正可负，耗散项 $-\Phi$ 恒为非正。

关键结论：

$\mu \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u}$ 没有确定符号——黏性可以从邻近区域向某点输入动能，同时仍在该点发生正定耗散。

易错点：

不能把 $\mu \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u}$ 直接当作耗散率。真正的不可逆损失是 $\Phi = 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D}$ ，始终非负。

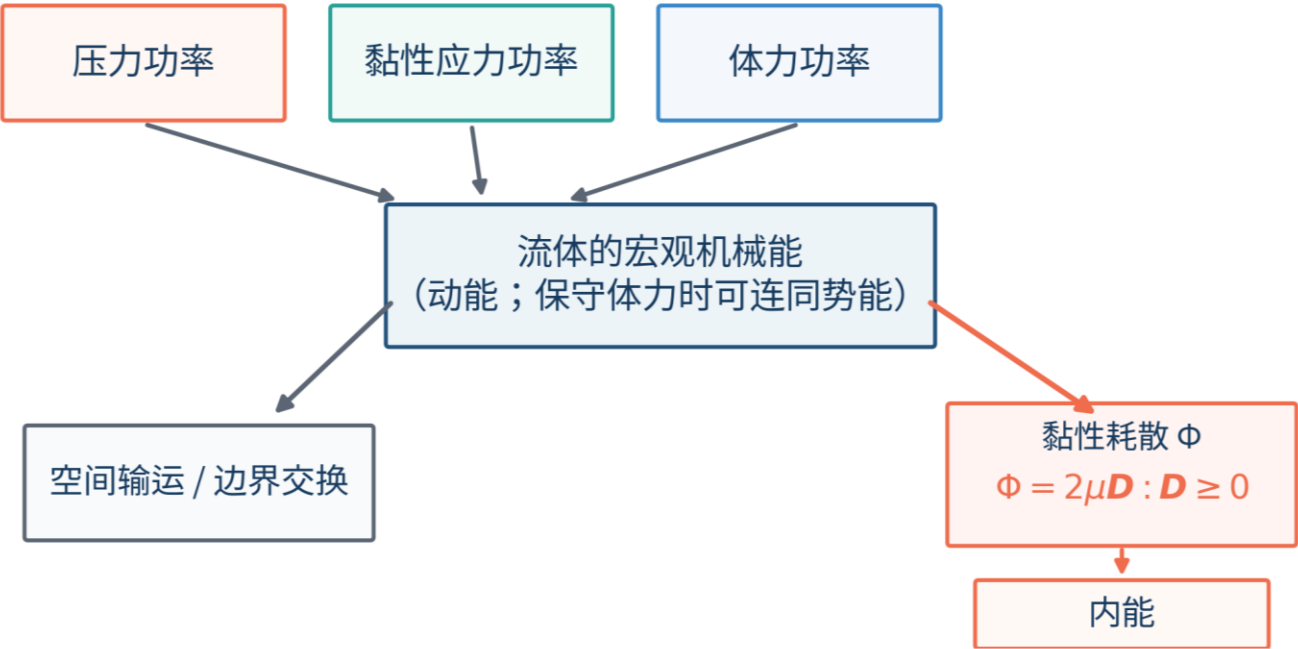
简单剪切流的耗散： $\mathbf{u} = (u(y), 0, 0)$ 时， $\Phi = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2$ 。以间距 h 、上壁速度 U 的平面 Couette 流为例， $\frac{du}{dy} = \frac{U}{h}$ ，单位体积耗散率为 $\mu \left(\frac{U}{h} \right)^2$ 。

在单位壁面积对应的流体层内积分： $\int_0^h \Phi dy = \frac{\mu U^2}{h} = \tau_w U$ 。右端正是运动壁面对流体输入的功率。稳态时，壁面持续输入的机械能全部由黏性耗散。

机械能的输入、输运与黏性耗散

机械能的输入、输运与黏性耗散

黏性使宏观机械能不可逆地转化为内能，但总能量并未消失



机械能"账本":

- 压强功率、黏性应力功率和体力功率改变宏观机械能
- 机械能通过空间输运和边界交换重新分配
- 只有 $\Phi = 2\mu D:D$ 始终非负，把宏观机械能不可逆地转化为内能

黏性的双重角色:

- 动量方程中：黏性表现为动量扩散
 - 机械能方程中：黏性表现为不可逆耗散
- 二者来自同一个 Newton 黏性应力，但回答不同问题。
- "损失"不是总能量消失，而是有组织的宏观机械能转化为内能。

能量线索贯穿全书：第1章讨论黏性的动量输运与耗散双重作用；第4章中压强功率和运动壁面功率为机械能输入；第8章中，湍流把大尺度动能逐级传递到小尺度，最终仍由分子黏性转化为内能。

这里的 $\frac{\Phi}{\rho}$ 是瞬时流动的分⼦耗散率；湍流理论中的平均耗散率则由脉动变形率的统计平均定义，物理根源相同。对于稳态压强驱动充分发展流动，入口与出口动能通量相同，压强功率输入最终由流体内部黏性耗散平衡；静止固壁虽然施加剪切牵引，却不作机械功。

2.17 Navier–Stokes 方程为什么难？

不可压缩 Newton 流体的控制方程形式并不长： $\nabla \cdot u = 0$ ， $\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\left(\frac{1}{\rho}\right) \nabla p + \nu \nabla^2 u + b$

但这些方程可以产生非常丰富和复杂的流动现象，其困难主要来自四个方面。

1. 对流项的非线性

$u \cdot \nabla u$ 中未知速度既作为被求解变量，又作为输运速度，使方程非线性。

非线性是 NS 方程复杂性的主要来源，也是千禧年七大数学难题之一（NS 方程解的存在性与光滑性）。

2. 压强与速度耦合

连续性方程和动量方程共同决定速度与压强，压强不是简单的独立演化变量。

不可压缩流动中压强承担约束作用，必须与速度场耦合求解（第 8 章 CFD 的压强-速度耦合问题）。

3. 边界条件的重要性

无滑移边界条件会在固壁附近形成显著速度梯度，使黏性效应即使在高 Reynolds 数流动中也不能简单忽略。

这正是边界层理论的物理基础——高 Re 不等于黏性不重要。

4. 多尺度结构

随着 Reynolds 数增大，流动可能同时包含尺度差异很大的结构。

边界层、剪切层、尾迹和湍流都体现了这一特点，给理论分析和数值计算都带来巨大挑战。

2.18 本章主线与小结

从"黏性如何影响流体运动"出发，本章建立了不可压缩 Newton 流体的完整控制方程体系。

知识主线：物理问题 → 数学表达 → 初边值问题 → 加强理解

- 1. 运动描述与质量守恒 (2.1-2.4)：** Lagrange 与 Euler 描述；物质导数 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$ ；连续性方程 $\nabla \cdot u = 0$ （不可压缩）。
- 2. 应力与本构关系 (2.5-2.8)：** Cauchy 应力定理 $t^n = \sigma \cdot n$ ；应力张量对称性；总应力 $\sigma = -pI + \tau$ ；Newton 黏性应力 $\tau = 2\mu D$ 。
- 3. 动量方程与 NS 方程组 (2.9-2.12)：** Cauchy 动量方程 $\rho \frac{Du}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho b$ ；代入本构关系得到 NS 方程；各项物理意义：非定常、对流、压强梯度、黏性扩散、体力。
- 4. 初边值问题 (2.13-2.14)：** 初始条件 $u(x, 0) = u_0(x)$ ；边界条件（无滑移、无穿透、入口、出口、对称、周期、应力）；压强基准；重力与修正压强。
- 5. 加强理解 (2.15-2.17)：** 涡量输运方程（对流、涡伸展、扩散）；机械能收支与黏性耗散 $\Phi = 2\mu D:D \geq 0$ ；NS 方程的困难（非线性、耦合、边界、多尺度）。

核心公式回顾：每个公式表达什么物理平衡？

名称	公式	物理意义
物质导数	$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$	跟随流体质点观察到的变化率 = 局部变化 + 对流输运
连续性方程	$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$	不可压缩流体中体积守恒，速度场无散
Cauchy 应力定理	$\mathbf{t}^n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$	任意法向面上的牵引向量由应力张量唯一确定
总应力分解	$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$	各向同性压强 + 偏应力；Newton 黏性应力与变形率线性相关
NS 方程	$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b}$	惯性 = 压强梯度 + 黏性扩散 + 体力；不可压缩 Newton 流体的动量守恒
涡量方程	$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$	涡量变化 = 三维涡伸展 + 黏性扩散；压强梯度不直接产生涡量
黏性耗散	$\Phi = 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} \geq 0$	宏观机械能不可逆转化为内能的速率；普通 Newton 流体恒非负

能力回顾与易错点

学完本章，学生应能：

- 判断某流动描述是 Lagrange 还是 Euler 观点
- 写出物质导数并解释局部项与对流项
- 由速度场判断是否满足不可压缩条件
- 解释应力张量分量的下标含义和对称性
- 写出 NS 方程并标注各项物理作用
- 为给定几何选择合适的边界条件
- 解释黏性耗散为什么恒非负

本章最常见的错误

- 混淆应力分量 τ_{xy} 与壁面剪切应力 τ_w
- 忽略外法向方向，直接把应力分量当壁面力
- 把 $\mu u \cdot \nabla^2 u$ 直接当作耗散率
- 混淆涡量 ω 与变形率 D / 黏性应力 τ
- 在对称面上错误地写 $u = 0$ (应为 $v = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$)
- 忘记压强需要基准条件
- 高 Re 时简单说"黏性可以忽略"

课程思政：科学建模的严谨性与工程责任

本章从质量守恒和动量守恒出发，经过严格的数学推导建立了 Navier-Stokes 方程组。这一过程体现了科学建模的基本方法：从物理守恒律出发，通过连续介质假设和本构关系，将复杂的流体运动转化为可分析、可计算的数学方程。

NS 方程的每一项都有明确的物理来源，不能随意增删。近似条件（如不可压缩、Newton 流体、常黏度）必须明确说明适用范围。这种严谨性是工程安全的基础——飞行器设计、管道输运、涡轮机械等工程问题都依赖于对控制方程和近似条件的正确理解。

同时，NS 方程的非线性和多尺度特性提醒我们：即使有了精确的控制方程，真实流动的理解仍需要尺度分析、近似方法和数值计算的结合。这正是后续章节要解决的问题，也是计算流体力学发展的动力。

概念辨析与方程项判断（共3题）

题1（判断）：对于不可压缩 Newton 流体，应力张量可以写成 $\sigma = -pI + 2\mu D$ 。因此，只要知道速度场，就可以完全确定应力张量和压强场。

题2（单选）：在二维不可压缩流动 $u = (u(x, y), v(x, y), 0)$ 中，涡量 $\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ 。以下哪种说法正确？

A. 有涡量就一定有黏性应力 B. 刚体转动有涡量但变形率为零 C. 涡量等于黏性应力 D. 无旋流动一定无黏性

题3（方程项判断）：考虑充分发展的二维管道流 $(u = u(y), v = 0, \frac{\partial}{\partial x} = 0)$ ，NS 方程的 x 分量为：

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

请判断：(a) 非定常项为什么为零？(b) 对流项 $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$ 为什么为零？(c) 这个方程表达了什么物理平衡？

参考答案与评价目的

题1：错误。速度场确定变形率D和黏性应力 τ ，但压强p需要通过动量方程和边界条件求解，不能仅由速度场代数确定。评价目的：检查压强-速度耦合的理解。

题2：B。刚体转动 $u=(-\Omega y, \Omega x)$ 有 $\omega=2\Omega$ 但 $D=0$ ，因此 $\tau=0$ 。评价目的：检查涡量与变形率/黏性应力的区别。常见错误：选A或C，混淆涡量和黏性应力。

题3：(a) 稳态流动 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ；(b) 充分发展 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 且 $v = 0$ ；(c) 压强梯度与黏性扩散平衡。评价目的：检查方程简化的物理依据。

综合分析：边界条件选择与物理意义

题目：考虑二维不可压缩 Newton 流体在两个无限大平行平板之间的流动。下壁 $y=0$ 静止，上壁 $y=h$ 以恒定速度 U 沿 x 方向运动。两板之间无外加压强梯度 ($\frac{\partial p}{\partial x} = 0$)，流动为稳态充分发展流动。

请回答：

- (1) 写出该流动的速度分量假设（哪些分量为零，哪些方向均匀）。
- (2) 写出下壁和上壁的边界条件。
- (3) 从 NS 方程出发，推导速度分布 $u(y)$ 。
- (4) 计算壁面剪切应力 τ_w ，并说明上壁和下壁的剪切应力方向。
- (5) 该流动中黏性耗散率 Φ 是多少？单位面积流体层的总耗散功率是多少？

参考答案与评价目的

(1) $u = u(y)$, $v = 0$, $w = 0$, $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ 。(2) 下壁 $u(0)=0$ ；上壁 $u(h)=U$ 。(3) NS方程简化为 $0=\mu d^2u/dy^2$ ，积分得 $u=Ay+B$ ，代入边界条件得 $u(y)=Uy/h$ （平面Couette流）。(4) $\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy} = \frac{\mu U}{h}$ ；下壁流体受牵引沿+x方向，上壁流体受牵引沿-x方向（注意外法向不同）。(5) $\Phi=\mu(U/h)^2$ ；单位面积总耗散 $\int_0^h \Phi dy = \frac{\mu U^2}{h} = \tau_w U$ ，等于上壁输入功率。

评价目的：检测学生能否综合运用本章知识——流动假设、边界条件、方程简化、求解、应力计算、耗散分析。常见错误：(4)中忽略外法向方向，认为上下壁剪切应力方向相同；(5)中不能将耗散与壁面功率联系起来。

课后任务与下章衔接

课后任务

1. 完成教材习题2.1–2.5（物质导数、连续性方程、应力张量、NS方程简化、边界条件）。
2. 推导题：从Cauchy动量方程出发，代入 $\sigma = -pI + 2\mu D$ 和 $\nabla \cdot u = 0$ ，推导不可压缩NS方程。
3. 思考题：为什么高Reynolds数流动中黏性仍然重要？结合无滑移条件和边界层概念回答。
4. 预习第3章：控制方程的无量纲化与Reynolds数。

下章预告：第3章 无量纲化与 Reynolds 数

本章建立了NS方程，但方程中各项的相对重要性取决于流动的尺度和参数。

第3章将回答：

- 如何对控制方程进行无量纲化？
- Reynolds数究竟比较了什么物理作用？
- $Re \ll 1$ 、 $Re \sim O(1)$ 、 $Re \gg 1$ 分别对应怎样的流动平衡？
- 无量纲化如何指导方程简化和近似？

本章在课程中的位置：控制方程是全书的基础

第1章（物理基础）→ **第2章（控制方程）** → 第3章（无量纲化与Re数）→ 第4章（精确解）→ 第5章（低Re数流动）→ 第6章（边界层）→ 第7章（分离与阻力）→ 第8章（湍流与CFD）

本章建立的连续性方程和NS方程是后续所有章节的出发点。第3章将通过无量纲化揭示方程中各项的相对重要性；第4-5章在特定几何和物理条件下求解简化后的方程；第6-7章利用尺度分析建立边界层理论并解释分离与阻力；第8章讨论湍流的统计描述和数值计算方法。

核心主线：黏性作用 → 方程 → 尺度 → 流动结构 → 工程应用